Co jsou to matice?

1. Lineární zobrazení

Ze střední už známe jeden typ lineárního zobrazení - lineární funkce ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).
Nechť $a \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Linearita funkce znamená, že:

a) homogenita: $f(ax) = af(x)$
b) additivita: $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Z toho například vyplývá, že $f(0) = 0$

Na vícedimenzionálních (pro jednoduchost reálných) vektorových prostorech plní funkci lineárních zobrazení **matice** ($\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$) – což je v zásadě **„rozšíření lineárních funkcí na vícedimenzionální vektorové prostory“**.
Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n, f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Linearita zobrazení znamená, že:

a) homogenita: $f(\lambda x) = \lambda f(x)$
b) additivita: $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Z toho opět vyplývá, že $f(0 \in \mathbb{R}^n) = 0 \in \mathbb{R}^m$

2. Matice M_B^A lineárního zobrazení $f: V \rightarrow W$

Obecně:
Matice M_B^A nechť reprezentuje funkci $f: V \rightarrow W$ (tj. na vektorových prostorech *V* a *W*).
V je n-dimenzionální vektorový prostor s bází $A = (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n})$.
W je m-dimenzionální vektorový prostor s bází $B = (\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m})$.
Pak sloupce matice M_B^A jsou vektory báze *A* zobrazené funkcí *f* na vektorový prostor *W*, vyjádřené lineární kombinací báze *B*.

$$M_B^A = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ f(\overrightarrow{a_1}) & f(\overrightarrow{a_2}) & \cdots & f(\overrightarrow{a_n}) \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}$$

Příklad 1:
Nechť $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$. *A, B* nechť jsou standardní báze daných vektorových prostorů, tj.:

$$A = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right), B = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Definujeme $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x-3y\\x-2y+z\end{pmatrix}$.

$$\text{Pak } f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \text{ a proto } \boldsymbol{M_B^A} = \begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1}\end{pmatrix}.$$

Pro kontrolu musí platit: $M_B^A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x-3y\\x-2y+z\end{pmatrix}$

Příklad 2:

Nechť jsou *f, V, W, A* stejné jako v Příkladu 1, ale báze B je odlišná: $B = \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Obrazy báze *A* si vyjádříme bází *B*:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \mathbf{1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \mathbf{0}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix} = \mathbf{-1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \mathbf{1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \mathbf{-1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \mathbf{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{Pak získáme } \boldsymbol{M_B^A} = \begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2}\end{pmatrix}.$$